

Parte 2

Ampliação da discussão

Questão 1

Os juros compostos desempenham papel fundamental no cálculo de investimentos pela capacidade que têm de potencializar os ganhos ao longo do tempo. Ao contrário dos juros simples, que são calculados apenas sobre o valor inicial do investimento, os compostos levam em consideração não apenas o valor principal, como também os juros acumulados em cada período. Isso significa que, à medida que os juros são reinvestidos, o valor do investimento cresce exponencialmente. Essa característica dos juros compostos é extremamente vantajosa, pois permite que o investidor obtenha retornos cada vez maiores. Além disso, a fórmula dos juros compostos permite calcular o montante final do investimento.

A fórmula de juros compostos é calculada por:

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$

Cada uma das letras é um importante conceito da matemática financeira:

1. **Capital (C):** *é o primeiro valor investido. Conhecemos como capital o valor inicial da negociação, ou seja, ele é o valor de referência para calcular os juros com o passar do tempo.*
2. **Taxa de juros (i):** *é a porcentagem cobrada em cima do capital a cada instante. Essa taxa pode ser ao dia (a.d.), ao mês (a.m.), ao ano (a.a.) etc. A taxa de juros é uma porcentagem geralmente representada na forma percentual, porém, para aplicação na fórmula, é importante escrevê-la sempre na forma decimal.*
3. **Tempo (t):** *é o período em que o capital ficará aplicado. É crucial que a taxa de juros (i) e o tempo (t) estejam sempre na mesma unidade de medida.*

4. **Montante (M):** é o valor final da transação que sofreu a influência dos juros compostos.

Utilizando a fórmula de juros compostos apresentada anteriormente, resolva a situação-problema a seguir.

Situação-problema: o professor Piraldo quer aplicar 4 mil reais em um investimento a juros compostos, a uma taxa de 3% ao mês (a.m.). Determine o montante se os prazos de aplicação forem de:

- a) 5 meses.
- b) 2 anos.

Adote $(1,03)^5 \cong 1,16$ e $(1,03)^{24} \cong 2,03$.

Questão 2

Os juros compostos estão relacionados aos logaritmos por sua fórmula de cálculo. Essa fórmula é semelhante à função exponencial, em que o tempo é o expoente. Os logaritmos são utilizados para resolver a equação dos juros compostos quando o objetivo é encontrar o tempo necessário para alcançar determinado valor acumulado. Ao aplicar o logaritmo na fórmula dos juros compostos, é possível isolar o tempo e determinar o seu valor.

Observe atentamente o exemplo a seguir, em que se utiliza logaritmos para o cálculo de um problema envolvendo investimentos. Em seguida, resolva a situação-problema apresentada, justificando sua resposta.

Exemplo: Erick quer aplicar 500 reais em um investimento a juros compostos, a uma taxa de 3,5% ao mês (a.m.). Quanto tempo após a aplicação o montante será de 3.500 reais? Adote $\log 1,035 \cong 0,0149$ e $\log 7 \cong 0,8451$.

Solução: de acordo com as informações apresentadas no enunciado, temos que: $C = 500$, $i = 3,5\% = 0,035$ (ao mês) e $M = 3.500$. Assim, utilizando a fórmula de juros compostos, obtemos:

$$3.500 = 500 \cdot (1 + 0,035)^t$$

$$3.500 = 500 \cdot (1,035)^t$$

$$\frac{3.500}{500} = (1,035)^t$$

$$7 = (1,035)^t$$

A ideia, agora, é aplicar \log nos dois membros da equação, obtendo:

$$\log \log 7 = \log \log (1,035)^t$$

$$\log \log 7 = t \cdot \log 1,035$$

$$0,8451 = t \cdot 0,0149$$

$$t = \frac{0,8451}{0,0149} \cong 57 \text{ meses.}$$

Situação-problema: a professora Laís quer aplicar mil reais em um investimento a juros compostos, a uma taxa de 6% ao ano (a.a.). Quanto tempo após a aplicação o montante será de 5 mil reais? Adote $\log 5 \cong 0,699$ e $\log 1,06 \cong 0,025$.

HABILIDADES DA BNCC

A atividade apresentada contribui para o desenvolvimento das seguintes habilidades do ensino médio:

(EF09MA05) Resolver e elaborar situações-problema que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.

(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da matemática financeira, entre outros.

(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, matemática financeira, entre outros.

GABARITO COMENTADO

Questão 1

a) De acordo com as informações apresentadas na situação-problema, temos: $C = 4.000$, $i = 3\% = 0,03$ (ao mês) e $t = 5$ meses. Assim, utilizando a fórmula de juros compostos, obtemos:

$$M = 4.000. (1 + 0,03)^5$$

$$M = 4.000. (1,03)^5$$

$$M \cong 4.000.1,16$$

$$M \cong R\$ 4.640$$

b) Segundo os dados apresentados na situação-problema, temos: $C = 4.000$, $i = 3\% = 0,03$ (ao mês) e $t = 24$ meses (o tempo deve ser expresso em meses). Assim, utilizando a fórmula de juros compostos, obtemos:

$$M = 4.000. (1 + 0,03)^{24}$$

$$M = 4.000. (1,03)^{24}$$

$$M \cong 4.000.2,03$$

$$M \cong R\$ 8.120$$

Questão 2

De acordo com as informações apresentadas no enunciado, temos que: $C = 1.000$, $i = 6\% = 0,06$ (ao ano) e $M = 5.000$. Assim, utilizando a fórmula de juros compostos, obtemos:

$$5.000 = 1.000 \cdot (1 + 0,06)^t$$

$$5.000 = 1.000 \cdot (1,06)^t$$

$$\frac{5.000}{1.000} = (1,06)^t$$

$$5 = (1,06)^t$$

A ideia, agora, é aplicar \log nos dois membros da equação, obtendo:

$$\log 5 = \log (1,06)^t$$

$$\log \log 5 = t \cdot \log 1,06$$

$$0,699 = t \cdot 0,025$$

$$t = \frac{0,699}{0,025} \cong 28 \text{ anos.}$$