

Matemática financeira e logaritmos: qual a sua relação?

Parte 1

Leitura e exploração da notícia

Na edição 13 do **TINO Econômico**, na matéria “Fique ligado no CDI”, aprendemos como o Certificado de Depósito Interbancário é a principal referência de rentabilidade das aplicações de renda fixa.

A seguir, vamos refletir mais profundamente sobre os investimentos desse gênero, bem como compreender de que modo a teoria dos logaritmos é utilizada para se calcular o tempo necessário de que um investimento precisa para se atingir determinado valor acumulado.

Fique ligado no CDI

O Certificado de Depósito Interbancário é a principal referência de rentabilidade das aplicações de renda fixa. Na hora de investir, porém, é preciso considerar outras variáveis, como os impostos, para garantir os ganhos | **SILVIA BALIEIRO**

O PRIMEIRO PASSO para saber o que é CDI é entender o que ele não é. CDI não é um tipo de investimento financeiro. A sigla significa Certificado de Depósito Interbancário. Ele é um importante indicador do rendimento de investimentos de renda fixa.

A confusão com o nome muitas vezes acontece porque a sigla é muito parecida com a do Certificado de Depósito Bancário (CDB), este sim, uma opção de investimento financeiro muito comum.



COMO SURTIU O CDI?
O CDI foi criado para atender a uma determinação do Banco Central do Brasil (BC), que obrigava os bancos a fechar as contas no azul (com saldo positivo) diariamente. Quando uma instituição chega ao fim do dia no vermelho (saldo negativo), ela precisa emprestar dinheiro de outras para zerar o saldo. Nessa transação é cobrado um juro, que recebeu o nome de CDI.

QUAL VALOR?
O CDI não tem valor fixo. Ele varia todos os dias, mas sempre com um percentual muito próximo da Selic, a taxa básica de juros do Brasil, que hoje está em 12,25%.

O QUE O CDI TEM A VER COM INVESTIMENTOS?
A taxa é muito usada como referência de rendimento para aplicações de renda fixa. Por isso é muito comum encontrar a informação de que um investimento rende 100% do CDI, 90% do CDI ou 106% do CDI, por exemplo. Supondo que o CDI esteja em 10%, um investimento que rende 100% do CDI terá um retorno de 10%. Já o investimento que rende 90% do CDI dará um retorno de 9%, enquanto o investimento de 106% do CDI, 10,6%.

TAXA DO CDI	RENDIMENTO PROMETIDO	RETORNO RECEBIDO
10%	90% do CDI	9%
10%	100% do CDI	10%
10%	106% do CDI	10,6%

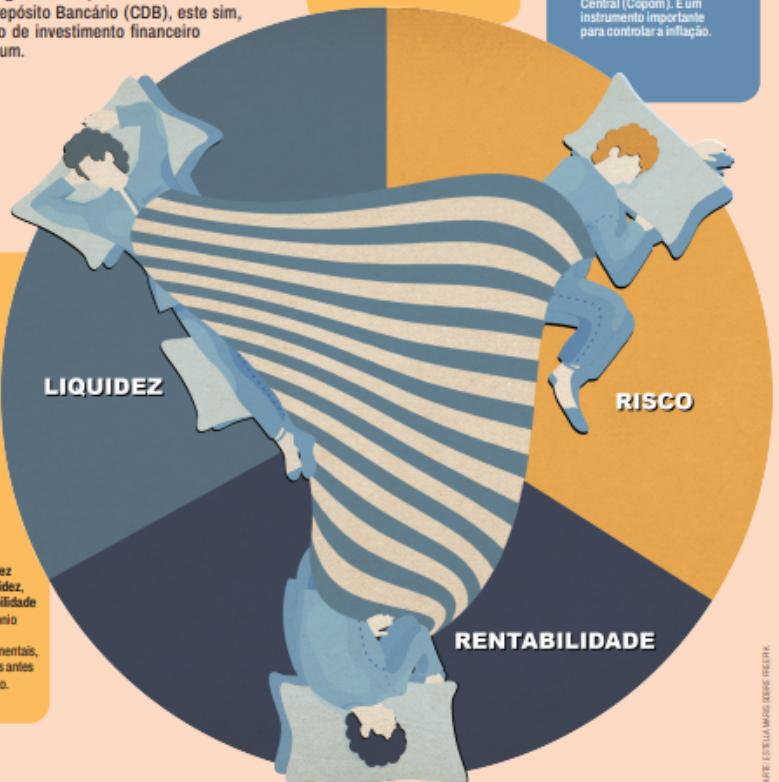
OUTRAS VARIÁVEIS
Além do imposto, há outras variáveis que precisam ser levadas em conta na hora de optar por um investimento: o risco e a liquidez. O risco diz respeito a quão seguro o investimento é; já a liquidez se refere a quão rápido é possível resgatar esse dinheiro. "A tríade rentabilidade, risco e liquidez é como se fosse um cobertor pequeno. Sempre que você quiser cobrir alguma dessas variáveis, vai precisar descobrir outras. Se quer mais rentabilidade, vai precisar abrir mão de liquidez ou de segurança. Se quer liquidez, precisa abrir mão de rentabilidade ou de segurança", afirma Antonio Sanches, analista da Rico. Essas são informações fundamentais, que precisam ser consideradas antes da escolha por um investimento.

NÃO DEIXE DE LEVAR EM CONTA OS IMPOSTOS
Ainda que o CDI seja um indicador significativo de rentabilidade, não pode ser o único fator a ser considerado na hora de optar por um investimento. Isso porque há outras cobranças, como os impostos, que podem corroer os ganhos.

"Um investimento de 106% bruto do CDI vai render quase a mesma coisa que um investimento de 90% do CDI que seja isento de imposto", diz Antonio Sanches, analista da Rico. Na tabela ao lado é possível comparar os valores.

RENDA FIXA
Os investimentos de renda fixa são aqueles em que o investidor sabe quanto terá de retorno financeiro após o prazo de investimento.

TAXA SELIC
É a taxa básica de juros do Brasil. É determinada pelo Comitê de Política Monetária do Banco Central (Copom). É um instrumento importante para controlar a inflação.



VALOR INVESTIDO	RENDIMENTO	TAXA DO CDI	VALOR BRUTO	IMPOSTO*	VALOR LÍQUIDO
R\$ 1.000	90%	12,85%	R\$ 1.240,86	-	R\$ 1.240,86
R\$ 1.000	106%	12,85%	R\$ 1.283,29	15%	R\$ 1.240,80

*sobre a rentabilidade

FONTE: ANTONIO SANCHES/RICO

AFE: ESTELLA MARIS DORE FREYRA

Parte 2

Ampliação da discussão

Questão 1

Os juros compostos desempenham papel fundamental no cálculo de investimentos pela capacidade que têm de potencializar os ganhos ao longo do tempo. Ao contrário dos juros simples, que são calculados apenas sobre o valor inicial do investimento, os compostos levam em consideração não apenas o valor principal, como também os juros acumulados em cada período. Isso significa que, à medida que os juros são reinvestidos, o valor do investimento cresce exponencialmente. Essa característica dos juros compostos é extremamente vantajosa, pois permite que o investidor obtenha retornos cada vez maiores. Além disso, a fórmula dos juros compostos permite calcular o montante final do investimento.

A fórmula de juros compostos é calculada por:

$$M = C. (1 + i)^t$$

Cada uma das letras é um importante conceito da matemática financeira:

1. **Capital (C):** *é o primeiro valor investido. Conhecemos como capital o valor inicial da negociação, ou seja, ele é o valor de referência para calcular os juros com o passar do tempo.*
2. **Taxa de juros (i):** *é a porcentagem cobrada em cima do capital a cada instante. Essa taxa pode ser ao dia (a.d.), ao mês (a.m.), ao ano (a.a.) etc. A taxa de juros é uma porcentagem geralmente representada na forma percentual, porém, para aplicação na fórmula, é importante escrevê-la sempre na forma decimal.*
3. **Tempo (t):** *é o período em que o capital ficará aplicado. É crucial que a taxa de juros (i) e o tempo (t) estejam sempre na mesma unidade de medida.*

4. **Montante (M):** é o valor final da transação que sofreu a influência dos juros compostos.

Utilizando a fórmula de juros compostos apresentada anteriormente, resolva a situação-problema a seguir.

Situação-problema: o professor Piraldo quer aplicar 4 mil reais em um investimento a juros compostos, a uma taxa de 3% ao mês (a.m.). Determine o montante se os prazos de aplicação forem de:

- a) 5 meses.
- b) 2 anos.

Adote $(1,03)^5 \cong 1,16$ e $(1,03)^{24} \cong 2,03$.

Questão 2

Os juros compostos estão relacionados aos logaritmos por sua fórmula de cálculo. Essa fórmula é semelhante à função exponencial, em que o tempo é o expoente. Os logaritmos são utilizados para resolver a equação dos juros compostos quando o objetivo é encontrar o tempo necessário para alcançar determinado valor acumulado. Ao aplicar o logaritmo na fórmula dos juros compostos, é possível isolar o tempo e determinar o seu valor.

Observe atentamente o exemplo a seguir, em que se utiliza logaritmos para o cálculo de um problema envolvendo investimentos. Em seguida, resolva a situação-problema apresentada, justificando sua resposta.

Exemplo: Erick quer aplicar 500 reais em um investimento a juros compostos, a uma taxa de 3,5% ao mês (a.m.). Quanto tempo após a aplicação o montante será de 3.500 reais? Adote $\log 1,035 \cong 0,0149$ e $\log 7 \cong 0,8451$.

Solução: de acordo com as informações apresentadas no enunciado, temos que: $C = 500$, $i = 3,5\% = 0,035$ (ao mês) e $M = 3.500$. Assim, utilizando a fórmula de juros compostos, obtemos:

$$3.500 = 500 \cdot (1 + 0,035)^t$$

$$3.500 = 500 \cdot (1,035)^t$$

$$\frac{3.500}{500} = (1,035)^t$$

$$7 = (1,035)^t$$

A ideia, agora, é aplicar log nos dois membros da equação, obtendo:

$$\log 7 = \log(1,035)^t$$

$$\log 7 = t \cdot \log 1,035$$

$$0,8451 = t \cdot 0,0149$$

$$t = \frac{0,8451}{0,0149} \cong 57 \text{ meses.}$$

Situação-problema: a professora Laís quer aplicar mil reais em um investimento a juros compostos, a uma taxa de 6% ao ano (a.a.). Quanto tempo após a aplicação o montante será de 5 mil reais? Adote $\log 5 \cong 0,699$ e $\log 1,06 \cong 0,025$.

GABARITO COMENTADO

Questão 1

a) De acordo com as informações apresentadas na situação-problema, temos: $C = 4.000$, $i = 3\% = 0,03$ (ao mês) e $t = 5$ meses. Assim, utilizando a fórmula de juros compostos, obtemos:

$$M = 4.000. (1 + 0,03)^5$$

$$M = 4.000. (1,03)^5$$

$$M \cong 4.000.1,16$$

$$M \cong R\$ 4.640$$

b) Segundo os dados apresentados na situação-problema, temos: $C = 4.000$, $i = 3\% = 0,03$ (ao mês) e $t = 24$ meses (o tempo deve ser expresso em meses). Assim, utilizando a fórmula de juros compostos, obtemos:

$$M = 4.000. (1 + 0,03)^{24}$$

$$M = 4.000. (1,03)^{24}$$

$$M \cong 4.000.2,03$$

$$M \cong R\$ 8.120$$

Questão 2

De acordo com as informações apresentadas no enunciado, temos que: $C = 1.000$, $i = 6\% = 0,06$ (ao ano) e $M = 5.000$. Assim, utilizando a fórmula de juros compostos, obtemos:

$$5.000 = 1.000. (1 + 0,06)^t$$

$$5.000 = 1.000. (1,06)^t$$

$$\frac{5.000}{1.000} = (1,06)^t$$

$$5 = (1,06)^t$$

A ideia, agora, é aplicar log nos dois membros da equação, obtendo:

$$\log 5 = \log(1,06)^t$$

$$\log 5 = t \cdot \log 1,06$$

$$0,699 = t \cdot 0,025$$

$$t = \frac{0,699}{0,025} \cong 28 \text{ anos.}$$

HABILIDADES DA BNCC

A atividade apresentada contribui para o desenvolvimento das seguintes habilidades do ensino médio:

(EF09MA05) Resolver e elaborar situações-problema que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.

(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da matemática financeira, entre outros.

(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, matemática financeira, entre outros.